

## ANÁLISE DE SENSIBILIDADE DE ESTRUTURAS MECÂNICAS.

Douglas Bogaz Hernandez, João Antônio Pereira. – Engenharia Mecânica - Departamento de Engenharia Mecânica – Faculdade de Engenharia – Campus Ilha Solteira.

Uma ferramenta importante no desenvolvimento e análise de projetos estruturais é a análise de sensibilidade, este recurso pode ser aplicado nas várias etapas do projeto, como por exemplo, na localização de erros de modelagem, na análise e modificação estrutural, otimização e outros. O presente trabalho discute o estudo e a implementação de técnicas de análise de sensibilidade para análises numéricas em estruturas mecânicas. A análise de sensibilidade pode fornecer as informações de quais parâmetros são mais sensíveis do modelo, de forma que o analista pode identificar quais parâmetros tem maior influência no comportamento do modelo. Essas informações são de grande utilidade na análise e desenvolvimento de projetos, quando se busca uma maior eficiência na modelagem e também uma maior redução de custos nos projetos. O cálculo da sensibilidade da resposta de uma estrutura para alterar as variáveis de projeto é geralmente o maior custo computacional no processo de otimização. Então é importante se ter algoritmos eficientes para se avaliar a sensibilidade.

A literatura tem discutido vários métodos para o cálculo da sensibilidade de parâmetros, métodos baseados no deslocamento (Lund, 1994; Haftka e Adelman, 1989), sensibilidade em relação às tensões (Lund, 1994), sensibilidade dos autovalores (Pereira, 1996, Maia et al., 1997), sensibilidades dos autovetores (Gatti e Ferrari, 1999) e outros. Este trabalho apresenta a implementação e análise de sensibilidade dos parâmetros de estruturas mecânicas em relação aos autovetores, ou seja, identificar quais parâmetros da estrutura possui maior influencia nos modos de vibrar. O algoritmo implementado é integrado em um programa geral de otimização e ajuste de modelos, de forma que o mesmo interage diretamente com o programa de Elementos Finitos utilizado na modelagem da estrutura. A análise de sensibilidade da estrutura será feita a partir da sensibilidade dos autovetores, com base no método de Gatti e Ferrari, 1999, onde a sensibilidade é obtida a partir de perturbações nas matrizes de massa e rigidez do sistema. Adicionalmente será realizada uma comparação dos resultados deste método implementado com o método já existente no programa, o qual realiza a análise de sensibilidade dos autovalores da estrutura, para que possa ter uma conclusão dos diferentes enfoques da sensibilidade em uma estrutura. O método dos autovalores já teve sua implementação e apresentação em trabalhos anteriores realizados pelos autores (Hernandes e Pereira, 2005). Será utilizado o módulo de análise de sensibilidade implementado no software PROMU, que já contém rotinas de análise de sensibilidade por diferentes métodos.

A expressão utilizada para o cálculo da sensibilidade neste caso é obtida diretamente a partir das equações de equilíbrio do modelo (Gatti e Ferrari, 1999). Utilizando a formulação de Elementos Finitos, o problema de autovetor é dado pela expressão abaixo, Eq. 1.

$$[K]\{\psi\}_r^{(0)} = \lambda_r^{(0)}[M]\{\psi\}_r^{(0)} \quad (1)$$

$[K]$  e  $[M]$  são as matrizes de rigidez e massas respectivamente e, em situações práticas, elas são matrizes simétricas e positivas definidas.  $\lambda_r^{(0)}$  é o  $r$ -ésimo autovalor de ordem zero (sem perturbação) e  $\{\psi\}_r^{(0)}$  é o correspondente autovetor também de ordem zero. Agora, seja  $\Delta K$  e  $\Delta M$  pequenas perturbações nas matrizes rigidez e massa do sistema, respectivamente, a Eq. (14) é re-escrita da seguinte forma:

$$[K + \Delta K]\{\psi\}_r = \lambda_r[M + \Delta M]\{\psi\}_r \quad (2)$$

Realizando alguns rearranjos matemáticos e limitando o problema até a primeira ordem, pois assume-se que as perturbações de ordens mais altas não têm influência significativa no sistema, tem-se

a Eq. (3) que leva ao cálculo da sensibilidade dos autovetores da estruturas a partir de pequenas perturbações nas matrizes do sistema.

$$\{\psi\}_r = \{\psi\}_r^{(0)} - \frac{1}{2} \{\psi\}_k^{(0)T} [\Delta K] \{\psi\}_k^{(0)} + \sum_{\substack{s=1 \\ (s \neq r)}}^n \left( \frac{\{\psi\}_s^{(0)T} ([\Delta K] - \lambda_r^{(0)} [\Delta M]) \psi_r^{(0)}}{(\lambda_r^{(0)} - \lambda_s^{(0)})} \right) \quad (3)$$

A expressão 3 é a base para a formulação do problema. O módulo de análise de sensibilidade implementado permite a seleção, via interface gráfica, de qualquer parâmetro do modelo de EF que se deseja calcular a sensibilidade. Esses parâmetros são as variáveis relacionadas com as propriedades físicas e/ou geométricas do modelo (seção de área, inércia, densidade, etc.). Os resultados podem ser analisados em tabelas, gráficos de barras ou gráficos de cores. A seguir serão discutidos os resultados da análise de sensibilidade dos autovetores de uma estrutura tipo *FRAME*. A estrutura a ser analisada, Fig. 1, é um modelo espacial formado por elementos do tipo viga. As vigas verticais apresentam propriedades geométricas diferentes dos elementos que estão na horizontal. A estrutura, modelada por elementos finitos, é formada por 16 nós e 24 elementos. A tabela 1 mostra as principais propriedades do modelo, onde estes parâmetros especificados serão utilizados nesta análise. Esses parâmetros são referentes às propriedades da estrutura e fazem parte da modelagem por Elementos Finitos. A numeração dada na tabela será utilizada para identificação do parâmetro nos resultados, uma vez que os gráficos (saída de dados) do programa trazem os parâmetros numerados de acordo com a seleção feita pelo analista.

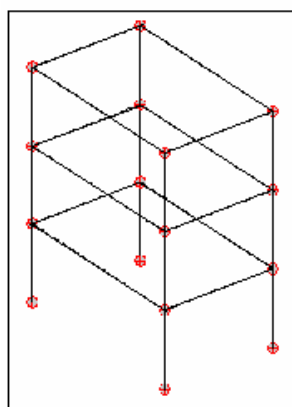


Figura 1 - FRAME

Tabela 1 - Numeração dos parâmetros para análise de sensibilidade

	Parâmetros físicos	Parâmetros $p_i$
Estrutura	Módulo de Elasticidade	1
	Coefficiente de Poisson	2
	Densidade do material	3
Elementos	Parâmetros geométricos	Parâmetros $p_i$
Vertical	Área da seção transversal	4
	Momento de inércia em torno do eixo Z	5
	Momento de inércia em torno do eixo Y	6
Horizontal	Área da seção transversal	7
	Momento de inércia em torno do eixo Z	8
	Momento de inércia em torno do eixo Y	9

A metodologia de análise é dada da seguinte forma: Inicialmente é definido o modelo de elementos finitos, após a escolha do modelo, é realizada a seleção dos parâmetros um a um. Um aspecto bastante importante a ser ressaltado é a interação de que o usuário pode estabelecer com o programa, re-definir a seleção, escolher outros parâmetros de forma lógica e outros. O usuário possui ainda a opção para rever os parâmetros selecionados e confirmar o cálculo da sensibilidade para o número de modos desejados. Após a seleção, o programa realiza o cálculo da sensibilidade dos parâmetros selecionados e é então disponibilizada a opção de visualização dos resultados, onde estes resultados podem ser visualizados em diferentes tipos de gráficos.

A figura 2 representa o mapa de cores da sensibilidade. Neste gráfico é possível visualizar qual parâmetro e em qual modo é mais sensível, simultaneamente, o que é útil na identificação das regiões mais sensíveis. Colorações avermelhadas representam alta sensibilidade, já as colorações azuladas representam baixa sensibilidade. Conforme pode ser observado, na figura, o analista pode ainda visualizar a sensibilidade em cada modo selecionado, a média da sensibilidade dos parâmetros, e também a sensibilidade em gráfico 3D. A figura 3 representa uma interface gráfica dada também pelo PROMU, onde é feita a comparação entre os modos de vibrar antes e depois de alguma alteração feita mecanicamente no modelo de elementos finitos. Essa alteração feita pelo analista, partiu do resultado

da Fig. 2, onde o parâmetro 8 se comportou como o mais sensível nos modos 8 e 9. A partir daí, foi acrescido 10% no valor do parâmetro e novamente é realizado cálculo dos autovetores. O MAC mostrado é a correlação entre os modos antes e depois da alteração. É possível observar que os modos 8 e 9 se mostram com a correlação mais distante de 100%, o que evidencia uma diferença entre os modos, validando assim, os resultados apresentados pelo algoritmo implementado no trabalho.

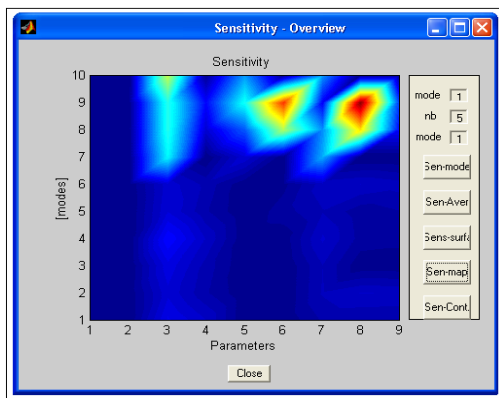


Figura 2 – Mapa de cores

Exp	Anal	fx(Hz)	fa(Hz)	dl(%)	mac(%)
01	01	43.55	45.08	3.52	99.97
02	02	64.85	67.74	4.45	99.93
03	03	68.79	68.79	0.00	100.00
04	04	98.73	101.56	2.86	99.93
05	05	108.25	108.26	0.01	100.00
06	06	129.83	130.26	0.33	99.94
07	07	142.03	148.95	4.87	99.98
08	08	255.73	266.73	4.30	94.40
09	09	284.55	286.00	0.51	99.48
10	10	287.18	301.14	4.86	99.39

Figura 3 – Correlação entre os modos (MAC)

Nesta análise ficou clara que os parâmetros se comportam de maneira similar em modos mais baixos, a com o aumento dos modos, o parâmetro 3 se torna sensível. Também em modos mais elevados os parâmetros 6 e 8 possuem alta sensibilidade. Já os parâmetros 1 e 2 se comportam como os menos sensíveis em todos os modos analisados. Analisando a variação física dos parâmetros, nota-se que ocorre uma variação na resposta do sistema quando se trata de parâmetros dispostos internamente nas matrizes de massa e rigidez. Já quando tratamos de parâmetros multiplicadores das matrizes, ou seja, parâmetros que alteram a matriz de uma forma proporcional, tem-se uma variação baixa do modo de vibrar. Isto pode ser explicado, pois quando a alteração ocorre na matriz como um todo, o modo de vibrar mantém mesma forma e esta correlacionado com o modo anterior. Já quando parâmetros alterados são internos as matrizes, o modo de vibrar muda de forma, ou seja, não apresenta uma boa correlação com o modo anterior.

A seguir serão mostrados os resultados das análises de sensibilidade da mesma estrutura, porém utilizando o método implementado anteriormente, que analisa a estrutura com relação aos autovalores (frequências naturais), e o método implementado neste trabalho, que analisa com relação aos autovetores (modos de vibrar) da estrutura. Os parâmetros de análise são os mesmos da tabela 1 e a faixa de modos utilizada será também os 10 primeiros modos. As figuras 4 e 5 representam o mapa de cores da análise de sensibilidade dos autovalores e dos autovetores, respectivamente.

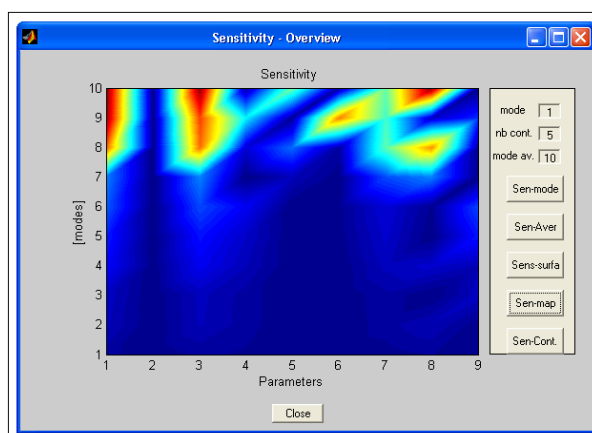


Figura 4 – Sensibilidade do autovalor

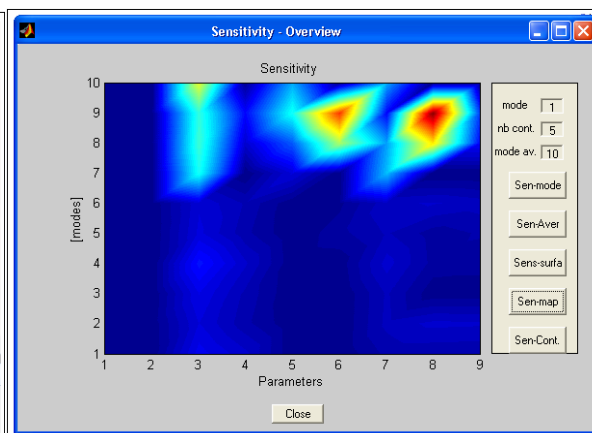


Figura 5 – Sensibilidade do autovetor

Uma primeira observação a ser feita é de que as maiores sensibilidades ocorreram nos modos mais altos. Nota-se também que alguns parâmetros não são influentes em nenhum dos dois enfoques de análise, é o caso dos parâmetros 2, 4 e 5. Já outros parâmetros são sensíveis em ambas as análises, como é o caso dos parâmetros 3, 6 e 8. O conhecimento desta informação é de fundamental importância na análise estrutural, uma vez que, os autovalores e autovetores são características importantes da estrutura, e conhecer os parâmetros influentes neste caso, torna alguns processos de desenvolvimento e otimização estrutural mais eficazes.

Um outro aspecto que também deve ser observado é que existem alguns parâmetros da estrutura que são bastante sensíveis em um enfoque, porém no outro se tornam pouco sensíveis. É o caso do parâmetro 1, que na análise de sensibilidade dos autovetores é o mais sensível, já na sensibilidade dos autovalores, é o menos sensível. Esta diferença de sensibilidades é justificada principalmente pelo posicionamento dos parâmetros nas matrizes de massa e rigidez da estrutura. A variação de alguns parâmetros pode levar a uma nova matriz rigidez/massa sem alterar a estrutura inteira da matriz, ou seja, seria equivalente a multiplicar a matriz por uma constante. Neste caso, este parâmetro poderá apresentar uma grande sensibilidade em relação aos autovalores mas não em relação aos autovetores, visto que os modos permanecem com a mesma forma.

Neste trabalho, é possível observar a variação dos autovetores do modelo quando ocorre alterações nos parâmetros do mesmo. Também pode-se comparar a sensibilidade dos parâmetros em diferentes enfoques, sejam estes parâmetros físicos ou geométricos. O programa utilizado conta com interfaces que auxiliam o analista nas conclusões e realizando análises com alterações mecânicas nos parâmetros sensíveis mostrados nos gráficos, diretamente no elemento finito da estrutura, é possível ter a validação dos métodos implementados, através de comparações de frequências e modos. Analisar o comportamento das frequências e dos modos do sistema quando se altera um dos parâmetros do modelo é um dos processos utilizados em engenharia para se ter uma maior eficiência e também para reduzir custos de desenvolvimento e otimização estrutural.

### Referências Bibliográficas

- Gatti, P. L., Ferrari, V., 1999, *Applied Structural and Mechanical Vibrations*, Library Binding, Publisher: Sponpress.
- Haftka, R. T.; Adelman, H. M., 1989, *Recent Development in Structural Sensitivity Analysis, structural Optimization*, V. 1, pp 137-151.
- Hernandes, D. B., Pereira, J. A., 2005, *Análise de Sensibilidade de Estruturas Mecânicas*, XVII Congresso de Iniciação Científica da Unesp.
- Lund, E., 1994, *Finite element Based Design Sensitivity Analysis and Optimization*, Ph. Thesis, Aalborg University, Denmark, 234 pp.
- Maia, S., et al., 1997, *Theoretical and Experimental Modal Analysis*, Research Studies Press Ltd..
- Thomson, W. T., 1978, *Teoria da Vibração*, Editora Interciência, Rio de Janeiro York.
- Pereira, J. A., 1996, *Structural Damage Detection Methodology using a Model Updating Procedure based on Frequency Response Functions - FRF(s)*, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Campinas.
- Pereira, J. A., Borges A. S., 2001, *Using of Model Updating Considering Damped FRF(s)*, Anais do 16º Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Uberlândia, (CD-Rom).
- Prezemieniecki, J. S., 1968, *Theory of Matrix Structural Analysis*, McGraw-Hill Book Company.
- Timoshenko, S., Young, D. H., 1974, *Vibration Problems in Engineering*, John Willey & Sons.
- Vanhonacker, P., 1985, *Sensitivity Analysis of Mechanical Structures*; Proceeding of 10th International Seminar on Modal Analysis, Leuven, Belgium.

**Bolsa:** FAPESP